

Matemática atuarial

Seguros Aula 10

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

Seguros com benefício crescente

- Contratos de seguro com alta procura são aqueles em que o benefício pago pela seguradora varia conforme o tempo em relação a data do contrato.
- Algumas opções nesse sentido são aquelas em que ocorre um acréscimo ou decréscimo no benefício (anual) de acordo com uma progressão aritmética.
- A importância segurada aumenta segundo uma progressão aritmética.

Produtos Atuariais com benefício crescente

Seguro de vida

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} t|A_x$$

$$(IA)_{x^{1:\overline{n}|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+t)v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} t|A_{x^{1:\overline{n-t}|}}$$

EXEMPLO 1: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere a taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

EXEMPLO 1: Qual o valor do prêmio puro único de um seguro vitalício feito por uma pessoa de 110 anos, com benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano? Considere a taxa de juros de 4% ao ano e a tábua de vida AT-2000 masculina.

$$A_{110} \approx \$0,9403557$$

Solução:

$$(IA)_{110} = \sum_{t=0}^5 {}_t|A_{110} = A_{110} + {}_1|A_{110} + {}_2|A_{110} + {}_3|A_{110} + {}_4|A_{110} + {}_5|A_{110} \approx 1,4482.$$

$$(IA)_{110} \approx 1,4482.$$

EXEMPLO 2: Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano, $i = 4\%$ ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25:5|} \approx 0,003788.$$

Solução:

EXEMPLO 2: Calcule o valor do prêmio puro único de um seguro com cobertura de 5 anos feito por uma pessoa de 25 anos. Considere o benefício igual a 1 e crescente em 1 unidade ao ano, $i = 4\%$ ao ano e utilize a tábua de vida AT-49 Masculina.

$$A_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,003788.$$

Solução:

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} = \sum_{t=0}^4 {}_tA_{x^{1:\overline{5-t}|}} = A_{25^{1:\overline{5}|}} + {}_1A_{25^{1:\overline{4}|}} + {}_2A_{25^{1:\overline{3}|}} + {}_3A_{25^{1:\overline{2}|}} + {}_4A_{25^{1:\overline{1}|}}$$

$$(IA)_{25^{1:\overline{5}|}} \approx 0,01178.$$

Seguro de vida com benefício crescente

```
Axc<- function( i, idade, n,b) {  
  if(n==0){  
    Axc<-0  
  } else{  
    v <- (n+1)*(1/(i+1))^(1:n)  
    if(n==1){  
      pxx<-1  
    }else { pxx <- c(1, cumprod( px[(idade+1):(idade+n-1)])  
    )}  
    qxx <- c(qx[(idade+1):(idade+n)])  
  
    Axc <- b* sum(v*pxx*qxx)}  
  return (Axc)  
}
```

Produtos Atuariais com benefício crescente

A notação para os seguros de vida vitalício e temporário, ambos com crescimento limitado a k anos, são respectivamente, $(I_{\overline{k}|}A)_x$ e $(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}}$, tal que:

$$(I_{\overline{k}|}A)_x = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_x$$

$$(I_{\overline{k}|}A)_{x^{1:\overline{n}|}} = (IA)_{x^{1:\overline{k}|}} + k \times {}_k|A_{x^{1:\overline{n-k}|}}$$

**Produtos Atuariais com benefício crescente
benefício pago no momento da morte**

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = \int_0^{\infty} s | \bar{A}_x ds.$$

$$(I\bar{A})_{x:1:\overline{n}|} = \int_0^n t e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt$$

RELAÇÃO ENTRE SEGUROS DE VIDA

<https://atuaria.github.io/portahalley/>

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Considere o Exemplo: Uma pessoa com 30 anos deseja contratar um seguro de vida vitalício que pague ao beneficiário o valor de \$1 ao final do ano de falecimento do segurado. Para a precificação do seguro, considera-se uma taxa de juros anual efetiva de 3% e admite-se que o tempo de vida adicional do segurado segue o comportamento descrito pela tábua de vida AT-49. Assim:

$$A_{30} = \sum_{t=0}^{109-} v^{t+1} ({}_t p_{30}) (q_{30+t}) \approx 0,28569$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Uma forma de calcular esse seguro com benefício pago no **momento da morte** consiste em **ajustar** um modelo contínuo para o tempo de vida da população descrita pela tábua AT-49

- Weibull
- Gamma
- Lognormal
- Gompertz
- Makeham
- Burr Generalized
- ...

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

- **WEIBULL**

$$f_{T_{30}}(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\alpha}}$$

$$\alpha = 4,0003324 \text{ e } \beta = 49,0007885$$

- **LOGNORMAL**

$$f_{T_{30}}(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(t)-\mu]^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu = 3,7306029 \text{ e } \sigma = 0,4465321$$

- **GAMMA**

$$f_{T_{30}}(t) = \frac{1}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\sigma}}$$

$$\alpha = 7,7358736 \text{ e } \delta = 0,1736456$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

- **LEI DE GOMPERTZ**

$$\mu(x+t) = Bc^{x+t} \rightarrow {}_t p_x = g^{c^{x+t}-c^x}$$

$$B \approx 0,0000251, c \approx 1,09494 \text{ e } g \approx 0,999723$$

- **LEI DE MAKEHAM**

$$\mu(x+t) = A + Bc^{x+t} \rightarrow {}_t p_x = e^{-A} g^{c^{x+t}-c^x}$$

$$A \approx 2,47(10^{-9}), B \approx 0,0000324, c \approx 1,09159 \text{ e } g \approx 0,999630$$

- **Weibull**

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{\infty} e^{-\ln(1,03)t} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}} dt \approx 0,2879932$$

- **Lognormal**

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{\infty} e^{-\ln(1,03)t} \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(t)-\mu]^2}{2\sigma^2}} dt \approx 0,3000974$$

- **Gamma**

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{\infty} e^{-\ln(1,03)t} \frac{1}{\sigma^{\alpha}\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\sigma}} dt \approx 0,2963992$$

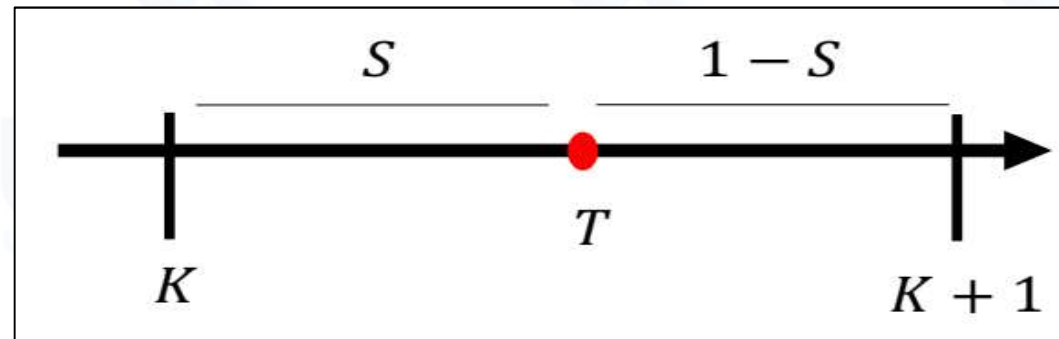
- **Gompertz**

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{\infty} e^{-\ln(1,03)t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \approx 0,2904571$$

- **Makeham**

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{\infty} e^{-\ln(1,03)t} {}_t p_x \mu(x+t) dt \approx 0,2939048$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO



$$T = (K + 1) - (1 - S)$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

Assumindo que T é independente de S e que $S \sim U_c(0,1)$.

Considere o seguro de vida inteira pago no momento de morte:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu(x+t) dt = E(e^{-\delta T})$$

$$\bar{A}_x = E\{e^{-\delta[(K+1)-(1-S)]}\} = E[e^{-\delta(K+1)} e^{\delta(1-S)}]$$

$$\bar{A}_x = E[e^{-\delta(K+1)}] E[e^{\delta(1-S)}] = E[v^{(K+1)}] E[e^{\delta(1-S)}]$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = E[v^{(K+1)}]E[e^{\delta(1-S)}]$$

$$\bar{A}_x = A_x \int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{e^{\delta} - 1}{\delta}$$

Substituindo $e^{\delta} = 1 + i$,

$$\bar{A}_x = A_x \frac{(1 + i) - 1}{\delta}$$

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

i : Taxa de juros discreta

δ : Taxa de juros constante

Uma pessoa com 30 anos deseja contratar um seguro de vida vitalício que pague ao beneficiário o valor de \$1 ao final do ano de falecimento do segurado. Para a precificação do seguro, considera-se uma taxa de juros anual efetiva de 3% e admite-se que o tempo de vida adicional do segurado segue o comportamento descrito pela tábua de vida AT-49. Assim:

$$A_{30} = \sum_{t=0}^{109-30} v^{t+1} ({}_t p_{30}) (q_{30+t}) \approx 0,28569$$

Weibull	0,2879932
Lognormal	0,3000974
Gamma	0,2963992
Gompertz	0,2904571
Makeham	0,2939048
$A_x \frac{i}{\delta}$	0,28999542

EXEMPLO 3: Uma pessoa de 25 anos deseja fazer um seguro de *vida inteiro* que paga 1 u.m. no **momento da morte**. Calcule o valor aproximado desse prêmio considerando que o prêmio pago para esse seguro com benefício pago ao **final do ano de morte** é de $A_{25} \approx 0,11242$.

Considere que o tempo de sobrevida desse segurado pode ser modelado pela tábua AT-49 e a seguradora promete remunerar o capital em 5% ao ano.

Seguro de vida Inteiro

$$A_{25} = \sum_{t=0}^{90} \left(\frac{1}{1,05} \right)^{t+1} {}_t p_{25} q_{25+t} \approx 0,11242$$

$$\bar{A}_{25} = A_{25} \frac{i}{\delta} = 0,11242 \left[\frac{0,05}{\ln(1,05)} \right] \approx 0,1152076$$

EXEMPLO 4: Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 *u.m.* ao final do ano de morte. Admita $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$ e que $i = 5\%$.

EXEMPLO 4: Considerar uma pessoa de idade de 30 anos que decide fazer um seguro de vida vitalício que pague um benefício de 1 u.m. ao final do ano de morte. Admita $\bar{A}_{30} \approx 0,28317$ e que $i = 5\%$.

$$A_{30} = \frac{\delta}{i} \bar{A}_{30} = \frac{\ln(1,05)}{0,05} 0,28317 \approx 0,2763182$$

RELAÇÃO ENTRE O CASO DISCRETO E O CASO CONTÍNUO

$$\bar{A}_x = A_x \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x^{1:\bar{n}}|} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta}$$

$$\bar{A}_{x:\bar{n}} = A_{x^{1:\bar{n}}|} \frac{i}{\delta} + A_{x:\bar{n}}^1$$

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\delta} (IA)_x$$

$$(I\bar{A})_{x^{1:\bar{n}}|} = \frac{i}{\delta} (IA)_{x^{1:\bar{n}}|}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- BOWERS et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba : CRV, 2022.
- GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática actuarial – Vida e pensões**. 2. ed. Coimbra: Almedina, 2010.

